Le bord de Poisson des produits en couronne

Eduardo Silva (ENS Paris)

Travail en commun avec Joshua Frisch

15 février 2024

This project has received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement N$^{\underline{o}}$ 945322.

Marches aléatoires et le bord de Poisson

G un groupe dénombrable, μ une mesure de probabilité sur G.

Considérons une suite de variables aléatoires $\{g_i\}_{i\geq 1}$ indépendantes de loi μ.

La μ-marche aléatoire sur G est la chaîne de Markov $\{w_n\}_{n\geq 0}$ avec $w_0 = e_G$ et

$$w_n = g_1 g_2 \cdots g_n, \text{ pour } n \geq 1.$$

G un groupe dénombrable, μ une mesure de probabilité sur G.

Considérons une suite de variables aléatoires $\{g_i\}_{i\geq 1}$ indépendantes de loi μ.

La μ-marche aléatoire sur G est la chaîne de Markov $\{w_n\}_{n\geq 0}$ avec $w_0 = e_G$ et

$$w_n = g_1 g_2 \cdots g_n, \text{ pour } n \geq 1.$$

$$(G^{\mathbb{Z}_+}, \mu^{\mathbb{Z}_+}) \to (G^{\mathbb{Z}_+}, \mathbb{P})$$
$$(g_1, g_2, \dots) \mapsto (w_1, w_2, \dots)$$

Question: Quel est le comportement asymptotique des trajectoires?

Considérons le décalage T sur l'espace de trajectoires:

$$T : (G^{\mathbb{Z}_+}, \mathbb{P}) \to (G^{\mathbb{Z}_+}, \mathbb{P})$$
$$(w_1, w_2, w_3, \ldots) \mapsto (w_2, w_3, \ldots).$$

Definition

Pour $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in G^{\mathbb{Z}_+}$ deux trajectoires de la μ-marche aléatoire sur G, on dit que $\mathbf{w} \sim \mathbf{w}'$ s'il existent $p, q \geq 0$ tels que $T^p\mathbf{w} = T^q\mathbf{w}'$.

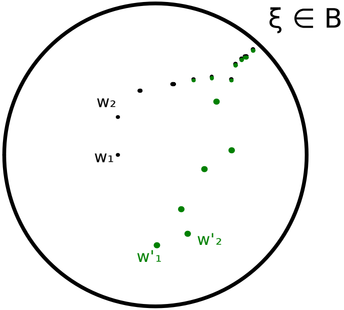
Considérons

$$\begin{aligned} \eta &= \text{enveloppe mesurable de } \sim \\ &= \text{la tribu complète des événements } T\text{-invariants } \mathbb{P}\text{–mod } 0. \end{aligned}$$

Le bord de Poisson

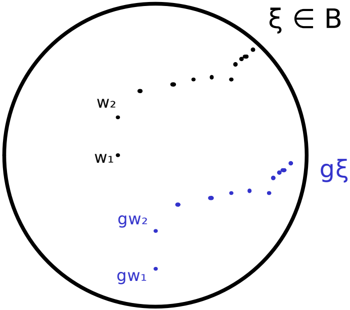
L'espace $B := G^{\mathbb{Z}_+}/\eta$ satisfait:

1. il existe $\pi : G^{\mathbb{Z}_+} \to B$ tel que $\pi \circ T = \pi$.



L'espace $B := G^{\mathbb{Z}_+}/\eta$ satisfait:

1. il existe $\pi : G^{\mathbb{Z}_+} \to B$ tel que $\pi \circ T = \pi$.
2. $G \curvearrowright B$ est une action mesurable et π est G-équivariante.



Le bord de Poisson

L'espace $B := G^{\mathbb{Z}_+}/\eta$ satisfait:

1. il existe $\pi : G^{\mathbb{Z}_+} \to B$ tel que $\pi \circ T = \pi$.
2. $G \curvearrowright B$ est une action mesurable et π est G-équivariante.
3. $\nu := \pi_* \mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur B qui est μ-stationnaire:
$$\nu = \mu * \nu := \sum_{g \in G} \mu(g) g_* \nu.$$

Le bord de Poisson

L'espace $B := G^{\mathbb{Z}_+}/\eta$ satisfait:

1. il existe $\pi : G^{\mathbb{Z}_+} \to B$ tel que $\pi \circ T = \pi$.
2. $G \curvearrowright B$ est une action mesurable et π est G-équivariante.
3. $\nu := \pi_* \mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur B qui est μ-stationnaire:
$$\nu = \mu * \nu := \sum_{g \in G} \mu(g) g_* \nu.$$

Definition

L'espace (B, ν) est le bord de Poisson de la μ-marche aléatoire sur G.

Un espace de probabilité (X, λ) sur lequel G agit de manière mesurable s'appelle un μ-bord de G s'il existe une application $B \to X$ qui est G-équivariante.

De manière équivalente:

Definition

(X, λ) est un μ-bord de G si:

1. *il existe $\pi : G^{\mathbb{Z}_+} \to X$ tel que $\pi \circ T = \pi$.*
2. *$G \curvearrowright X$ est une action mesurable et π est G-équivariante.*
3. *$\lambda := \pi_* \mathbb{P}$ est μ-stationnaire:*

$$\lambda = \mu * \lambda := \sum_{g \in G} \mu(g) g_* \lambda.$$

Étant donné (G, μ) et notant (B, ν) son bord de Poisson:

Question 1: Trivialité du bord de Poisson

Est-ce que $(B, \nu) \cong (\{\star\}, \delta_\star)$?

Étant donné (G, μ) et notant (B, ν) son bord de Poisson:

Question 1: Trivialité du bord de Poisson

Est-ce que $(B, \nu) \cong (\{\star\}, \delta_\star)$?

Question 2: Identification du bord de Poisson

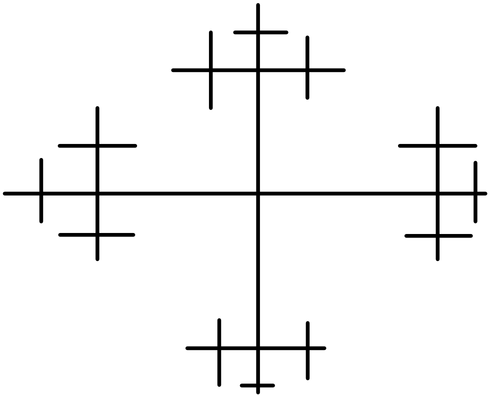
Supposons que l'on connaît un μ-bord (X, λ).

Est-il vrai que $(X, \lambda) \cong (B, \nu)$?

Exemple: le groupe libre

Prenons $G = F_2 = F(\{a, b\})$ le groupe libre de rang 2, et

$$\mu = \frac{1}{4}\left(\delta_a + \delta_{a^{-1}} + \delta_b + \delta_{b^{-1}}\right).$$



Exemple: le groupe libre

Prenons $G = F_2 = F(\{a, b\})$ le groupe libre de rang 2, et

$$\mu = \frac{1}{4}\left(\delta_a + \delta_{a^{-1}} + \delta_b + \delta_{b^{-1}}\right).$$

Alors $\mathbb{P}$−p.s. il existe $\xi \in \partial F_2 = \{\text{mots infinis réduits sur } \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}\}$ tel que $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$.

L'espace $(\partial F_2, \lambda)$ est un μ-bord, où pour tout $A \subseteq \partial F_2$ mesurable:

$$\lambda(A) := \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} w_n \in A\right).$$

Bord de Poisson des groupes libres

Plus généralement: si μ est une mesure de probabilité sur F_2 avec $\langle \mathrm{supp}(\mu) \rangle$ non-abélien, l'espace $(\partial F_2, \lambda)$ est un μ-bord.

On sait que $(\partial F_2, \lambda)$ est le bord de Poisson dans les cas suivants:

- $\mathrm{supp}(\mu) = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ [Dynkin-Maljutov '61]
- $\mathrm{supp}(\mu)$ fini [Derriennic '75]
- $H(\mu) := \sum_{g \in F_2} -\mu(g) \log(\mu(g)) < \infty$ et $\mathbb{E}[\log(|w_1|)] < \infty$ [Kaimanovich '00].
- $H(\mu) < \infty$ [Chawla-Forghani-Frisch-Tiozzo '22].

Bord de Poisson des groupes libres

Plus généralement: si μ est une mesure de probabilité sur F_2 avec $\langle \mathrm{supp}(\mu) \rangle$ non-abélien, l'espace $(\partial F_2, \lambda)$ est un μ-bord.

On sait que $(\partial F_2, \lambda)$ est le bord de Poisson dans les cas suivants:

- $\mathrm{supp}(\mu) = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ [Dynkin-Maljutov '61]
- $\mathrm{supp}(\mu)$ fini [Derriennic '75]
- $H(\mu) := \sum_{g \in F_2} -\mu(g) \log(\mu(g)) < \infty$ et $\mathbb{E}[\log(|w_1|)] < \infty$ [Kaimanovich '00].
- $H(\mu) < \infty$ [Chawla-Forghani-Frisch-Tiozzo '22].

Pour des mesures avec $H(\mu) = \infty$ c'est un problème ouvert!
Même si on suppose $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \bigcup_{n \geq 0} \{a, b\}^n$.

Produits en couronne

Le produit en couronne des groupes A et B est

$$A \wr B := \bigoplus_B A \rtimes B,$$

où $\bigoplus_B A = \{f : B \to A \mid f \text{ à support fini}\}$ et B agit sur $f \in \bigoplus_B A$:

$$(b \cdot f)(x) = f(b^{-1}x), \; x, b \in B.$$

Interpretation comme groupe d'allumeur de réverbères

Multiplier $(f, x) \in A \wr B$ à droite par des éléments de A modifie la configuration des lampes f à la position x, pendant que multiplier à droite par des éléments de B modifie la position position.

Le bord de Poisson des produits en couronne

Considérons la marche aléatoire $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^d, \mu)$, $d \geq 1$:

$$(f_n, X_n) \in G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^d, n \geq 1$$

Proposition (Kaimanovich - Vershik '83)

Si $\operatorname{supp}(\mu)$ est fini et $\mu_{\mathbb{Z}^d}$ est transiente, alors la configuration de lampes se stabilise presque sûrement:
Il existe $f_\infty : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tel que $f_n(\mathbf{v}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_\infty(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$.

Par conséquent, l'espace $\mathcal{L} = \left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^d}, \lambda\right)$ est un μ-bord, où

$$\lambda(A) = \mathbb{P}(f_\infty \in A)$$

pour $A \subseteq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^d}$ mesurable.

Le bord de Poisson des produits en couronne

Considérons la marche aléatoire $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^d, \mu)$, $d \geq 1$:

$$(f_n, X_n) \in G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^d, n \geq 1$$

Proposition (Kaimanovich '01)

Si $\sum_{g \in G} |g|\mu(g) < \infty$ et $\mu_{\mathbb{Z}^d}$ est transiente, alors la configuration de lampes se stabilise presque sûrement:
Il existe $f_\infty : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tel que $f_n(\mathbf{v}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_\infty(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$.

Par conséquent, l'espace $\mathcal{L} = \left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^d}, \lambda\right)$ est un μ-bord.

Le bord de Poisson des produits en couronne

Considérons la marche aléatoire $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^d, \mu)$, $d \geq 1$

$$(f_n, X_n) \in G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^d, n \geq 1, \text{ et } \mathcal{L} = \left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^d}, \lambda \right).$$

- Si $\sum_{g\in G} |g|\mu(g) < \infty$ et $\mathbb{E}[X_1] \neq 0$, alors $\mathcal{L}$ est le bord de Poisson [Kaimanovich '01].

Le cas $\mathbb{E}[X_1] = 0$ est plus délicat (et on considère $d \geq 3$):

- Si $\sum_{g\in G} |g|^3\mu(g) < \infty$ et $d \geq 5$, alors $\mathcal{L}$ est le bord de Poisson [Erschler '11].
- Si $\sum_{g\in G} |g|^2\mu(g) < \infty$ et $d \geq 3$, alors $\mathcal{L}$ est le bord de Poisson [Lyons - Peres '21].

Théorème [Frisch - S. '23]

Considérons μ une mesure de probabilité sur $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$.

Supposons que

- $H(\mu) = \sum_{g \in G} -\mu(g) \log(\mu(g)) < \infty$, et
- la configuration de lampes se stabilise presque sûrement.

Alors $\mathcal{L} = \left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^d}, \lambda\right)$ est le bord de Poisson.

Théorème [Frisch - S. '23]

Considérons μ une mesure de probabilité sur $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$.

Supposons que

- $H(\mu) = \sum_{g \in G} -\mu(g) \log(\mu(g)) < \infty$, et
- la configuration de lampes se stabilise presque sûrement.

Alors $\mathcal{L} = \left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^d}, \lambda \right)$ est le bord de Poisson.

Les deux hypothèses sont satisfaites en particulier quand $d \geq 3$, $\langle \mathrm{supp}(\mu) \rangle = G$ et $\sum_{g \in G} |g| \mu(g) < \infty$.

Le critère d'entropie

Notons $H(w_n) := -\sum_{g\in G} \mathbb{P}(w_n = g)\log(\mathbb{P}(w_n = g))$

Théorème [Derriennic '80, Kaimanovich - Vershik '83]

Supposons que $H(\mu) < \infty$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(w_n)}{n} = 0 \iff \text{le bord de Poisson de} (G, \mu) \text{ est trivial.}$$

Si $\mathbf{X} = (X, \lambda)$ est un μ-bord, alors pour λ-presque tout $\xi \in X$ il existe la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}^\xi$, qui satisfait $\mathbb{P} = \int_X \mathbb{P}^\xi \, d\lambda(\xi)$.

Définissons $H_{\mathbf{X}}(w_n) = \displaystyle\int_X \sum_{g \in G} -\mathbb{P}^\xi(w_n = g) \log(\mathbb{P}^\xi(w_n = g)) \, d\lambda(\xi)$.

Théorème [Kaimanovich '00]

Supposons que $H(\mu) < \infty$ et que l'on connaît un μ-bord $\mathbf{X} = (X, \lambda)$.

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_{\mathbf{X}}(w_n)}{n} = 0 \iff \mathbf{X} \text{ est le bord de Poisson } (G, \mu).$$

Soit $\mathbf{X}$ un μ-bord de G, et $H(\mu) < \infty$. Supposons que l'on peut trouver des partitions $(\mathcal{P}_n)_{n \geq 0}$ of $G^{\mathbb{Z}_+}$ tels que

1. $H(\mathcal{P}_n) = o(n)$
2. $H_{\mathbf{X}}(w_n \mid \mathcal{P}_n) = o(n)$.

Alors $\mathbf{X}$ est le bord de Poisson de (G, μ).

En effet, on a:

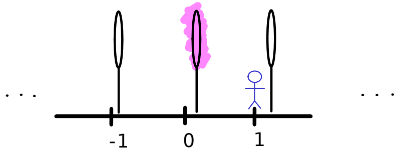
$$H_{\mathbf{X}}(w_n) \leq H_{\mathbf{X}}(w_n \vee \mathcal{P}_n) \leq H(\mathcal{P}_n) + H_{\mathbf{X}}(w_n \mid \mathcal{P}_n) = o(n).$$

Exemple: le semigroupe libre (cf. Forghani - Tiozzo)

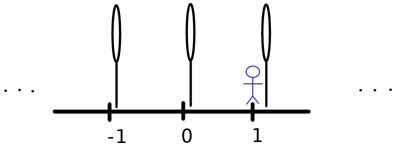
Considérons $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ et notons $a = \delta_0 t, b = t$.

Pour toute μ avec $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \langle a, b\rangle^{+}$ les configurations de lampes $\{f_n\}_n$ se stabilisent.

a =



b =



Exemple: le semigroupe libre (cf. Forghani - Tiozzo)

Considérons $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ et notons $a = \delta_0 t$, $b = t$.

Pour toute μ avec $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \langle a, b\rangle^+$ les configurations de lampes $\{f_n\}_n$ se stabilisent.

Example (1)

Pour $\mu = \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b$ le bord de Poisson est $\mathcal{L} = \big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}, \lambda\big)$.

Exemple: le semigroupe libre (cf. Forghani - Tiozzo)

Considérons $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ et notons $a = \delta_0 t$, $b = t$.

Pour toute μ avec $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \langle a, b \rangle^{+}$ les configurations de lampes $\{f_n\}_n$ se stabilisent.

Example (1)

Pour $\mu = \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b$ *le bord de Poisson est* $\mathcal{L} = \left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}, \lambda\right)$.

1. Notons $\{(f_n, X_n)\}_n$ la μ-marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$.
2. on a $f_n(\mathbf{v}) = \begin{cases} f_\infty(\mathbf{v}) & \text{si } \mathbf{v} < X_n, \\ 0 & \text{si } \mathbf{v} \geq X_n. \end{cases}$
3. On a $X_n = n$ pour tout $n \geq 1$.
4. Alors $H_{\mathcal{L}}(f_n, X_n) = 0$.

Example (2)

Le bord de Poisson de toute mesure μ avec $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \langle a, b\rangle^{+}$ et $H(\mu) < \infty$ est $\mathcal{L} = \big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}, \lambda\big)$.

Example (2)

Le bord de Poisson de toute mesure μ avec $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \langle a, b\rangle^{+}$ et $H(\mu) < \infty$ est $\mathcal{L} = \left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}, \lambda\right)$.

1. Notons $\{(f_n, X_n)\}_n$ la μ-marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$.
2. On a $f_n(\mathbf{v}) = \begin{cases} f_\infty(\mathbf{v}) & \text{si } \mathbf{v} < X_n, \\ 0 & \text{si } \mathbf{v} \geq X_n. \end{cases}$
3. $H_{\mathcal{L}}(f_n \mid X_n) = 0$.

Example (2)

Le bord de Poisson de toute mesure μ avec $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \langle a, b\rangle^{+}$ et $H(\mu) < \infty$ est $\mathcal{L} = ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}, \lambda)$.

1. Notons $\{(f_n, X_n)\}_n$ la μ-marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$.
2. On a $f_n(\mathbf{v}) = \begin{cases} f_\infty(\mathbf{v}) & \text{si } \mathbf{v} < X_n, \\ 0 & \text{si } \mathbf{v} \geq X_n. \end{cases}$
3. $H_{\mathcal{L}}(f_n \mid X_n) = 0$.
4. $H(X_n) = o(n)$ car c'est une marche aléatoire sur un groupe abélien.
5. Alors $H_{\mathcal{L}}(f_n, X_n) = o(n)$.

Fin

Merci beaucoup !

Théorème [Azencott ’70, Furstenberg ’73]

Soit μ une mesure de proba non-dégénérée G. Si G n’est pas moyennable, alors (G, μ) a un bord de Poisson non-trivial.

Théorème [Rosenblatt ’81, Kaimanovich-Vershik ’83]

Tout groupe moyennable admet une mesure de probabilité non-dégénérée avec un bord de Poisson trivial.

Remark

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, est moyennable et satisfait que toute mesure de proba non-dégénérée d’entropie finie $H(\mu) < \infty$ a un bord de Poisson non-trivial (Erschler ’04).